Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1983

MATHEMATIQUES
2ème épreuve

Coefficient 3

Samedi 21 Mai 1983 de 8 heures à 12 heures

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

PROBLEME 1

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie 1

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans IR, dont les termes vérifient la relation de récurrence :

$u_{n+1} + p\,u_n - p = 0$, $n \geqslant 1$.

Question 1

Déterminer les nombres réels α et β tels que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans IR, définie par :

$v_n = u_n - \alpha$, $n \geqslant 1$,

vérifie la relation :

$v_{n+1} = \beta\, v_n$.

Question 2

Calculer u_n en fonction de p et u_1 .

Question 3

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite l en fonction de p .

Question 4

Dans le cas particulier où $u_1 = p = \frac{1}{2}$, trouver le plus petit entier naturel n tel que :

$| u_n - l | < 10^{-3}$.

.../...

Partie 2

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans IR, dont les termes vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} + p\, v_n - p = 0, & n \geqslant 1 , \\ v_{n+1} + p\, u_n - p = 0, & n \geqslant 1 . \end{cases}$$

Question 1

On définit deux suites $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans IR de la façon suivante, où α et β désignent deux nombres réels :

$$u'_n = u_n - \alpha, \quad n \geqslant 1 ,$$
$$v'_n = v_n - \beta, \quad n \geqslant 1 .$$

Déterminer α et β pour qu'on ait la relation matricielle suivante, pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} u'_{n+1} \\ v'_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \end{pmatrix}$$

où M est une matrice 2 x 2 à coefficients réels que l'on déterminera.

Question 2

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

Question 3

Déduire de ce qui précède, pour tout entier naturel n , $n \geqslant 1$, les expressions de u_n et v_n en fonction de u_1 , v_1 , n et p . (On distinguera les cas où n est pair et n est impair).

●

PROBLEME 2

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Dans un stand de tir, un tireur T a une probabilité p, $0 < p < 1$, d'atteindre une cible donnée. Il effectue des tirs répétés indépendants.

Partie 1

Le tireur T joue une partie selon les règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.

- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux ; on note L cet événement.

La partie s'arrête si et seulement si l'un des deux événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considèrera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul :

S_n : le n ième tir est dans la cible.

E_n : le n ième tir est en dehors de la cible.

Z_n : la partie n'est pas terminée à l'issue du n ième tir.

W_n : le tireur T a gagné la partie à l'issue du n ième tir.

L_n : le tireur T a perdu la partie à l'issue du n ième tir.

On note : $q = 1 - p$ et $u = 2pq$.

Question 1

1.1 - Exprimer l'événement Z_2 en fonction des événements S_1, E_1, S_2, E_2 .

1.2 - Exprimer l'événement Z_4 en fonction des événements Z_2, S_3, E_3, S_4, E_4 .

1.3 - Calculer les probabilités des événements Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 .

1.4 - Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, calculer la probabilité de l'événement Z_n .

Question 2

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, calculer la probabilité de l'événement W_n et la probabilité de l'événement L_n .

Question 3

On désigne par w et *l* les probabilités respectives des événements W et L.

3.1 - Calculer w et *l* .

3.2 - Calculer la probabilité de l'événement : «la partie ne s'arrête pas».

Question 4

On admettra que le nombre de tirs effectués au cours d'une partie est une variable aléatoire X.

4.1 - Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

4.2 - Calculer l'espérance mathématique de X.

N.B. : on indique que si x est un nombre réel tel que $|x| < 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad .$$

Partie 2

Le tireur T joue une partie selon les nouvelles règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.

.../...

- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins trois ; on note L cet événement.

- La partie s'arrête si et seulement si l'un des événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considèrera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul :

A_n : à l'issue du n ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus un.

B_n : à l'issue du n ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors.

C_n : à l'issue du n ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins un.

D_n : à l'issue du n ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux.

Pour tout entier naturel non nul, on désigne respectivement par a_n, b_n, c_n, d_n, les probabilités des événement A_n, B_n, C_n, D_n ; et on pose $a_0 = c_0 = d_0 = 0$, $b_0 = 1$.

Question 1

Exprimer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} et d_{n-1} .

Question 2

On admettra que les séries de termes généraux a_n, b_n, c_n et d_n sont des séries convergentes. On désigne par a, b, c et d leurs sommes respectives.

2.1 - Déduire de la question 1 , quatre relations entre a, b, c, d et calculer a et d .

2.2 - Calculer les probabilités w et l des événements W et L.

2.3 - Calculer la probabilité de l'événement : «la partie ne s'arrête pas».

2.4 - Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de p telle que $w = l$.